ΛΥΣΕΙΣ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω $z_1 = x + yi$ και $z_2 = α + βi$. Τότε

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x + yi)\cdot(α + βi)} = \overline{αx + xβi + αyi - βy} = \overline{(αx - βy) + (xβ + αy)i}$$
$$= (αx - βy) - (βx + αy)i \quad \textbf{(1)}$$

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (x - yi)(α - βi) = αx - αyi - βxi - βy = (αx - βy) - (αy + βx)i \quad \textbf{(2)}$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

Α.2. α. 4, β. 5 , γ. 2

Β.1. Γ

Β.2. $z = 1 + i$ οπότε $ρ = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$συνφ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad ημφ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $φ = \frac{π}{4}$, συνεπώς $z = \sqrt{2}\left(συν\frac{π}{4} + iημ\frac{π}{4}\right)$

$$z^{16} = \left[\sqrt{2}\left(συν\frac{π}{4} + iημ\frac{π}{4}\right)\right]^{16}$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{16}\left(συν\frac{16π}{4} + iημ\frac{16π}{4}\right)$$
$$= 2^8 (συν4π + iημ4π) = 2^8(1 + 0i) = 256$$

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

α.

Για να ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ θα πρέπει $κ + 2λ - 3 = λ + 1 \Leftrightarrow κ + λ = 4$

β.

Για να ορίζεται και το γινόμενο $B \cdot A$ θα πρέπει $3κ - κ^2 + 2 = κ^2 - 2κ - 1 \Leftrightarrow$

$$2κ^2 - 5κ - 3 = 0$$

$$κ = 3 \quad ή \quad κ = \frac{1}{2} \text{ απορρίπτεται}$$

Επομένως για να ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ θα πρέπει
$κ = 3$ και $κ + λ = 4 \Leftrightarrow κ = 3$ και $λ = 1$.
Τότε ο πίνακας Α είναι διάστασης 2 x 2 και ο πίνακας Β είναι διάστασης 2 x 2

Β .

α .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & 0+0 \\ 0+0 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\ I$$

β.

$$\begin{aligned} 2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} &= 2(A^2)^{1002} + (A^2)^{1000}A + (A^2)^{999}\ A \\ &= 2(-I)^{1002} + (-I)^{1000}A + (-I)^{999}A \\ &= 2\ I + I\ A + (-I)A = 2I + A - A = 2I \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Για να είναι η ευθεία $x = 4$ κατακόρυφη ασύμπτωτη θα πρέπει να ισχύει

$\lim\limits_{x\to 4}(x-\alpha) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 4}(x^2 - 3x + 2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \alpha = 0$ και $6 \neq 0$

Οπότε θα πρέπει $\alpha = 4$.

Τότε πράγματι για το όριο $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-4}$ έχουμε

$\lim\limits_{x\to 4}(x^2 - 3x + 2) = 6$ και $\lim\limits_{x\to 4^+}(x-4) = 0$ με $x - 4 > 0$ για τιμές του x κοντά στο 4^+, άρα $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$.

Επομένως η ευθεία $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β.

$$\text{Είναι}\quad f'(x) = \frac{(2x-3)(x-\alpha) - (x^2 - 3x + 2)}{(x-\alpha)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2\alpha x - 3x + 3\alpha - x^2 + 3x - 2}{(x-\alpha)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\alpha x + 3\alpha - 2}{(x-\alpha)^2}$$

Είναι $f(1) = 0$, $f'(1) = \dfrac{\alpha - 1}{(1-\alpha)^2} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, $\alpha \neq 1$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ(1, 0) είναι η $y - 0 = \dfrac{1}{\alpha-1}(x-1) \Leftrightarrow$

$$y = \frac{1}{\alpha-1}x - \frac{1}{\alpha-1}$$

Για να διέρχεται η ευθεία αυτή από το $A(-2,\ 3)$ πρέπει και αρκεί

$$3 = \frac{1}{\alpha-1}(-2) - \frac{1}{\alpha-1} \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha - 3 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

γ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν $\alpha > 2$ υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

Αφού $\alpha > 2$, η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$,

παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$

και $f(1) = 0 = f(2)$

Άρα, με βάση το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $f'(xo) = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Αφού ο κάθε βαθμολογητής διορθώνει 100 γραπτά την ημέρα, οι x βαθμολογητές θα διορθώνουν 100x γραπτά την ημέρα.

Επειδή όμως το σύνολο των γραπτών είναι 2000, αφού τα 1000 γραπτά διορθώνονται από δύο καθηγητές, για την διόρθωση όλων των γραπτών θα απαιτηθούν

$\frac{2000}{100x} = \frac{20}{x}$ ημέρες.

Επομένως τα έξοδα της διόρθωσης επιμερίζονται όπως παρακάτω

- Αμοιβή για την διόρθωση 2000 γραπτών = $2000 \cdot 200 = 400000$ δραχμές
- Έξτρα επίδομα καθηγητών = 10000x δραχμές
- Αμοιβή εποπτών $= 2 \cdot \frac{20}{x} \cdot 4000 = \frac{160000}{x}$ δραχμές

Οπότε το κόστος της διόρθωσης είναι $K(x) = 400000 + 10000x + \frac{160000}{x}$ δραχμές

$K(x) = 400 + 10x + \frac{160}{x}$ χιλιάδες δραχμές

β.

Είναι $K'(x) = 10\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = 10 \cdot \frac{x^2 - 16}{x^2}$

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ αφού $x > 0$

$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

Άρα η συνάρτηση K παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 4$

Επομένως το ελάχιστο κόστος προκύπτει όταν απασχοληθούν 4 καθηγητές

γ.

Το ελάχιστο κόστος είναι $K(4) = 480$ χιλιάδες δραχμές

Οι ημέρες απασχόλησης είναι $\frac{20}{4} = 5$